

Abbildung 1 https://cdn.pixabay.com/photo/2020/03/14/12/56/corona-4930541_960_720.jpg

15.03.2020

Mathematik in Zeiten von COVID-19

exponentielles Wachstum

Der Grund, warum ihr heute diese Aufgaben von mir in digitaler Form nach Hause bekommt, ist das Coronavirus (die Krankheit, die dieses Virus auslöst, heißt COVID-19). Wir alle sollen möglichst wenig soziale Kontakte haben, um die Ausbreitung des Virus zu verlangsamen und somit das Gesundheitssystem nicht zu überfordern, damit alle kranken Menschen optimal versorgt werden können. Solche Maßnahmen gab es bisher noch nie, sie sind aber richtig und notwendig. Warum eigentlich?

Im wöchentlichen Nachrichten-Podcast „[Die Lage der Nation](#)“ habe ich dazu einige Berechnungen gehört, die die Notwendigkeit dieser Maßnahmen veranschaulichen. In der Tabelle seht ihr die vom [Robert Koch Institut](#) (RKI) in Deutschland erfassten Krankheitsfälle:

Datum	4.3.	5.3.	6.3.	7.3.	8.3.	9.3.	10.3.	11.3.	12.3.	13.3.	14.3.
bestätigte Fälle	262	400	639	795	902	1139	1296	1567	2369	3062	3795
Todesfälle	0	0	0	0	0	2	2	3	5	5	8

- a) Bestätige rechnerisch, dass es sich hierbei (näherungsweise) um ein exponentielles Wachstum handelt.

[Zur Kontrolle: Wachstumsfaktor im Bereich von 1,1 bis 1,6, durchschnittlich 1,3]

Man geht davon aus, dass die tatsächliche Anzahl der Infizierten deutlich höher liegt, da sich nicht jeder Infizierte testen lässt. Wir gehen hier erstmal von folgenden, leicht vereinfachten Annahmen aus:

1. Es sterben ungefähr 1% der Infizierten an COVID-19 (Sterblichkeitsrate).
2. Bei den Fällen, die tödlich verlaufen, vergehen durchschnittlich 17 Tage von Infektion bis zum Tod.
3. Ein Infizierter steckt durchschnittlich 3 weitere Menschen im gesamten Krankheitsverlauf an. Daraus ergibt sich ungefähr eine Verdopplung der Infizierten alle 6 Tage.

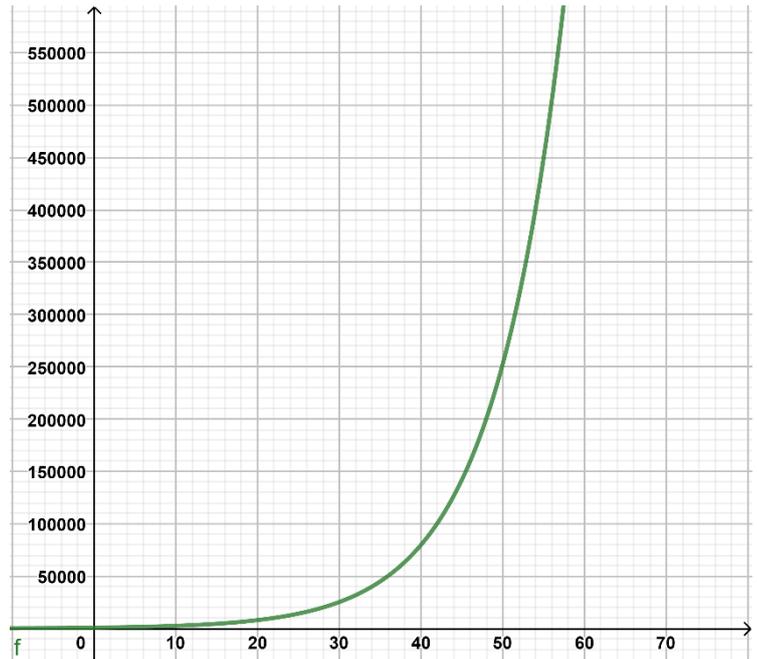
Auf Grund dieser Annahmen kann man nun zeigen, dass es deutlich mehr Fälle geben muss, als bisher bekannt.

- b) Die 8 Menschen, die bis zum 14.3. verstorben sind, müssten am 26.2. bereits infiziert gewesen sein (Annahme 2)). Wie viele Infizierte muss es am 26.2. dann insgesamt in Deutschland gegeben haben? (Annahme 1))
- c) Bestimme den Wachstumsfaktor pro Tag, wenn sich die Zahl der Infizierten alle 6 Tage verdoppelt.

Gehe ab jetzt von folgender Gleichung aus, die die Anzahl der Infizierten ($f(x)$) am x Tagen nach dem 26.2.2020 berechnet (z.B. $x = 4$ entspricht dem 1.3.2020):

$$f(x) = 800 \cdot 1,122^x$$

- d) Berechne, wie viele Menschen am 14.3. mit dem Virus infiziert gewesen sein müssten. Vergleiche dein Ergebnis mit den bestätigten Fällen am 14.3. laut RKI.
- e) Berechne, wie lange es dauern würde, bis nach diesen Annahmen alle in Deutschland lebenden Menschen (ca. 83 Millionen) infiziert sind.
Wir vernachlässigen hierbei, dass infizierte Menschen auch wieder gesund und immun werden und andere Faktoren einer ungebremsten Verbreitung entgegenstehen.



Was ist, wenn sich unsere Annahmen ändern?

- f) Wie verändern sich die Zahl der Infizierten, wenn die Sterblichkeitsrate bei 0,2% liegt, wie es das RKI für Deutschland angibt? Wird sie größer oder kleiner?
- g) Wie verändert sich die Zahl der Infizierten, wenn ein kranker Mensch mehr als 3 weitere Menschen infiziert.

Und was heißt das jetzt für das deutsche Gesundheitssystem?

Hier noch ein paar vereinfachte Prognosen und Zahlen:

1. 50% – 60% aller Deutschen werden sich voraussichtlich irgendwann mit dem Virus infizieren.
2. 10% - 15% der Infizierten kommen in Krankenhäuser.
3. 5% der Infizierten müssen auf die Intensivstation.
4. 1% der Infizierten muss dort beatmet werden.
5. In Deutschland gibt es ungefähr 500.000 Krankenhausbetten, 28.000 Betten auf Intensivstationen, von denen in 24.000 beatmet werden kann.

- h) Berechne mit unserem bisherigen Modell, wann alle Krankenhausbetten in Deutschland mit COVID-19-Patienten belegt sein werden. Wann sind all Intensivstationsbetten belegt? Wann all Beatmungsplätze?

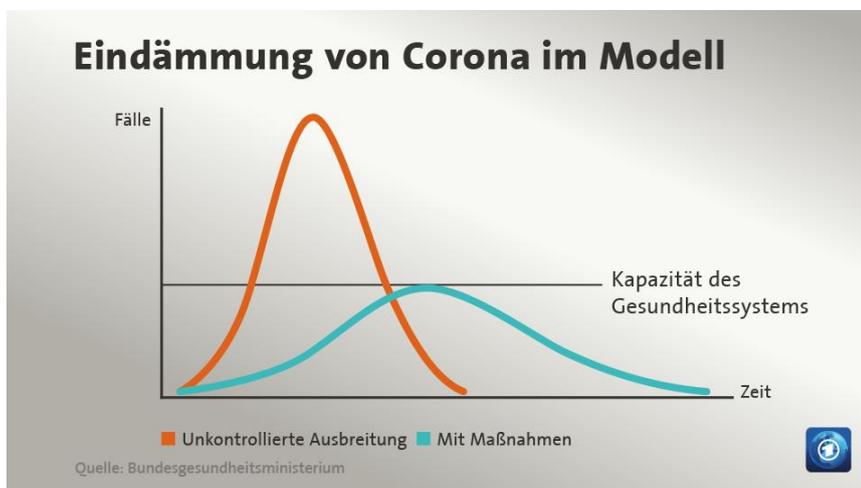


Abbildung 2 ARD Tagesschau - Wir müssen Zeit gewinnen

<https://www.tagesschau.de/inland/coronavirus-deutschland-177.html>

Durch dieses, zweifellos auf vielen sehr unsicheren Annahmen und Vereinfachungen beruhenden Modell, wird klar, warum die Kurve der Krankheitsverläufe abgeflacht werden muss ... und das schaffen wir nur, wenn wir uns möglichst langsam infizieren. Also: bleibt zu Hause.

Quellen:

Robert Koch Institut:

https://www.rki.de/DE/Content/InfAZ/N/Neuartiges_Coronavirus/Situationsberichte/Archiv.html

(zuletzt aufgerufen am 15.3.2020 um 16:01 EDT)

„Lage der Nation“ 180 vom 14.3.2020:

<https://www.kuechenstud.io/lagedernation/2020/03/14/ldn180-corona-pandemie-gefluechtete-in-gr-afd-fluegel-rechtsextrem-putin-forever-trumps-gegner/> Minute 2:30 bis 14:15 (zuletzt aufgerufen am 15.3.2020 um 16:00 EDT)

ARD-Tagesschau „Kurz erklärt: Corona-Ausbreitung verlangsamen“:

<https://www.facebook.com/tagesschau/videos/2814498465300564/> (zuletzt aufgerufen am 15.3.2020 um 17:30 EDT)

Lösungen

a) Wachstumsfaktor der einzelnen Tage

04.03.2020	262	0	
05.03.2020	400	0	1,526717557
06.03.2020	639	0	1,5975
07.03.2020	795	0	1,244131455
08.03.2020	902	0	1,134591195
09.03.2020	1139	2	1,262749446
10.03.2020	1296	2	1,137840211
11.03.2020	1567	3	1,209104938
12.03.2020	2369	5	1,511805999
13.03.2020	3062	5	1,292528493
14.03.2020	3795	8	1,239386022

b) 8 Todesfälle am 14.3. => 800 Infizierte am 26.2.

c) Verdopplung alle 6 Tage

26.2. 800

3.3. 1600

9.3. 3200

15.3. 6400

d) 14.3.: $x = 17$

$f(17) = 5662$

e) $83000000 = 800 \cdot 1,122^x$

$$x = \log_{1,122} \left(\frac{83000000}{800} \right)$$

$$x = 100,33 \text{ Tage} = 5.6.2020$$

f) Die Anzahl der Infizierten am 26.2. müsste höher sein, da die 8 Todesfälle nicht 1%, sondern nur 0,2% der Gesamtzahl ausmachen. Es wären am 26.2. bereits 4000 Menschen in Deutschland infiziert.

g) Durch mehr Ansteckungen je Kranken verbreitet sich die Krankheit schneller. Der Wachstumsfaktor steigt.

h) Krankenhausbetten:

$$500.000 = 800 \cdot 1,122^x \cdot 0,125$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,122} \left(\frac{500.000}{800 \cdot 0,125} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \approx 74 = 10.5.2020$$

Intensivbetten:

$$28.000 = 800 \cdot 1,122^x \cdot 0,05$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,122} \left(\frac{28.000}{800 \cdot 0,05} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \approx 57 = 23.4.2020$$

Krankenhausbetten:

$$24.000 = 800 \cdot 1,122^x \cdot 0,01$$

$$\Leftrightarrow x = \log_{1,122} \left(\frac{24.000}{800 \cdot 0,01} \right)$$

$$\Leftrightarrow x \approx 70 = 6.5.2020$$